

# **PROSIDING SEMINAR NASIONAL**

**Yogyakarta, 27 Desember 2014**

**Tema :**

**Revitalisasi Pendidikan Matematika Menuju AFTA 2015**

**Editor :**

**Dr. Suparman, M.Si., DEA.**

**Sugiyarto, P.hD.**

**Dr. Tutut Herawan, M.Si.**

**Bidang Ilmu :**

**Pendidikan Matematika dan Matematika**

## KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warrahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur kami haturkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan karunia-Nya sehingga acara Seminar Nasional Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan (SENDIKMAD 2014) dapat berjalan dengan sukses. Tak lupa Shalawat dan Salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang senantiasa kita nantikan Syafa'atnya di hari akhir nanti. Selamat datang kami ucapkan kepada seluruh peserta dan pemakalah yang bergabung dengan SENDIKMAD 2014. Adapun tema seminar nasional kali ini adalah "Revitalisasi Pendidikan Matematika Menuju AFTA 2015". Seminar nasional ini ditujukan untuk para peneliti, dosen, guru, mahasiswa, dan juga masyarakat yang peduli pada pendidikan matematika.

Kami merasa senang dan bangga karena kami telah mengundang empat pembicara utama yang ahli di bidangnya masing-masing. Salah satu diantaranya berasal dari luar negeri yaitu Dr Thien Lei Mee dari SEAMEO RECSAM Penang Malaysia. Dan juga pembicara dari dalam negeri yaitu Dr. Ir. Illah Sailah, MS. dari Dirjen BELMAWA DIKTI, Prof. Dr. Suharsimi Arikunto dari Universitas Ahmad Dahlan, dan Dr. Tutut Herawan, M.Si. dari Universitas Ahmad Dahlan. Selain itu kami selaku panitia merasa senang atas partisipasi dari 239 pemakalah dan peserta seminar yang datang dari berbagai daerah di Indonesia. Terdapat sekitar 168 pemakalah yang mempresentasikan karya tulisnya yang berkaitan dengan pendidikan matematika dan matematika murni.

SENDIKMAD 2014 tidak dapat berjalan dengan baik tanpa adanya bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Kami sangat berterimakasih kepada Rektor Universitas Ahmad Dahlan dan Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Ahmad Dahlan. Terimakasih juga kami ucapkan kepada Pengurus Himpunan Mahasiswa Program Studi (HMPS) Pendidikan Matematika dan juga pihak sponsorship yang telah turut membantu kelancaran SENDIKMAD 2014.

Akhir kata, Kami selaku panitia berharap seminar nasional ini dapat menuai manfaat yang besar di kemudian hari dan juga anda merasa nyaman selama berada di Yogyakarta.

Wassalamu'alaikum Warrahmatullahi Wabarakatuh.

Yogyakarta, 23 Desember 2014

Penyusun

---

**SAMBUTAN KAPRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
PADA ACARA PEMBUKAAN SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA  
SENDIKMAD 2014**

Asalamu'alaikum Wr. Wb

1. Yth. Rektor Universitas Ahmad Dahlan
2. Yth. Dekan FKIP UAD
3. Yth. Para Pembicara utama
4. Yth. Pemakalah dan peserta seminar
5. Yth. Bapak/ Ibu Tamu Undangan, serta hadirin sekalian

Puji Syukur kami haturkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan Hidayah- Nya sehingga acara Seminar Nasional Pendidikan matematika Ahmad Dahlan (SENDIKMAD 2014) dapat berjalan dengan sukses. Tak lupa Sholawat dan Salam selalu tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW yang senantiasa kita nantikan Syafa'atnya di akhir nanti. Selamat datang kami ucapkan kepada seluruh peserta dan pemakalah yang bergabung dengan SENDIKMAD 2014. Adapun tema kali ini adalah “Revitalisasi Pendidikan Matematika Menuju AFTA 2015”. Seminar ini merupakan kegiatan rutin tahunan prodi pendidikan matematika yang ditujukan kepada peneliti, dosen, guru, mahasiswa dan juga masyarakat yang peduli pada pendidikan matematika.

Kami merasa senang dan bangga karena kami telah mengundang pembicara-pembicara utama yang ahli pada bidangnya masing-masing. Salah satu diantaranya berasal dari luar negeri yaitu Dr. Thien Lei Mee dari SEAMEO RECSAM Penang Malaysia dan juga pembicara dari dalam negeri yaitu Dr. Ir. Illah Sailah, MS. Direktorat BELMAWA DIKTI, Prof. Dr. Suharsimi Arikunto dari UAD dan Dr. Tutut Herawan juga dari UAD. Kami atas nama panitia mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas kesediaan beliau semua hadir dalam acara ini. Selain itu kami selaku panitia merasa senang atas partisipasi dari 235 peserta yang datang dari berbagai daerah di Indonesia. Terdapat 167 pemakalah yang mempresentasikan karya tulisnya yang berkaitan dengan pendidikan matematika, matematika murni dan juga terapan.

SENDIKMAD 2014 tidak dapat berjalan tanpa adanya bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Kami sangat berterimakasih kepada Rektor Universitas Ahmad Dahlan dan Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Ahmad Dahlan atas dorongan, dukungan dan fasilitas yang disediakan. Terimakasih kepada seluruh sponsor dan semua pihak yang tidak dapat kami sebutkan satu per satu yang telah turut membantu kelancaran SENDIKMAD 2014. Terimakasih juga kami ucapkan kepada pengurus Himpunan mahasiswa Program Studi (HMPS) Pendidikan matematika dan teman-teman panitia yang telah bekerja keras demi suksesnya penyelenggaraan seminar ini.

Akhir kata selaku ketua program studi sekaligus panitia berharap seminar nasional ini dapat menuai manfaat yang besar di kemudian hari dan anda juga merasa nyaman selama berada di Yogyakarta.

Kami juga mengucapkan terimakasih kepada Bapak, Ibu dan Saudara peserta yang telah berkenan mengikuti seminar ini hingga selesai nantinya. Atas nama panitia,

kami mohon maaf yang sebesar-besarnya jika dalam kegiatan ini terdapat kesalahan, kekurangan maupun hal-hal yang tidak/ kurang berkenan di hati Bapak, Ibu dan saudara sekalian.

Semoga seminar ini dapat memberikan sumbangan dalam memajukan pendidikan matematika dan matematika guna mewujudkan Indonesia yang lebih baik

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Kaprodi pendidikan matematika

Drs. H. Abdul Tarom, M.Si.

**SAMBUTAN REKTOR UAD  
PADA ACARA PEMBUKAAN SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA  
SENDIKMAD 2014**

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

1. Yth. Dekan FKIP UAD
2. Yth. Para Pembicara utama
3. Yth. Pemakalah dan peserta seminar
4. Yth. Bapak/ Ibu Tamu Undangan, serta hadirin sekalian

Puji Syukur kami haturkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan Hidayah- Nya sehingga acara Seminar Nasional Pendidikan matematika Ahmad Dahlan (SENDIKMAD 2014) dapat berjalan dengan sukses. Tak lupa Sholawat dan Salam selalu tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW yang senantiasa kita nantikan Syafa'atnya di akhir nanti. Selamat datang kami ucapkan kepada seluruh peserta dan pemakalah yang bergabung dengan SENDIKMAD 2014. Adapun tema kali ini adalah “Revitalisasi Pendidikan Matematika Menuju AFTA 2015”. Seminar ini ditujukan kepada peneliti, dosen, guru, mahasiswa dan juga masyarakat yang peduli pada pendidikan matematika.

Secara khusus perkenalkan saya mengucapkan terimakasih kepada Dr. Thien Lei Mee dari SEAMEO RECSAM Penang Malaysia , Dr. Ir. Illah Sailah, MS. Direktorat BELMAWA DIKTI, Prof. Dr. Suharsimi Arikunto dari UAD dan Dr. Tutut Herawan juga dari UAD yang telah berkenan menjadi pembicara utama pada semiar ini.

Harapan kami dengan adanya seminar ini adalah terjadinya tukar informasi antar berbagai pihak terkait, serta terjalinnya kerjasama yang baik antar dosen, peneliti,guru serta mahasiswa di seluruh Indonesia untuk mewujudkan masyarakat Indonesia yang maju, sejahtera dan berkarakter. Seminar nasional ini harus mampu mendorong para dosen dan praktisi di bidang pendidika matematika dan matematika murni untuk senantiasa melakukan inovasi demi kemajuan bangsa Indonesia.

Akhirnya saya mengucapkan terimakasih atas partisipasinya dalam seminar yang diselenggarakan rutin tiap tahun oleh prodi pendidikan matematika FKIP UAD ini dengan harapan semoga seminar ini memberikan motivasi bagi para peserta untuk terus berkarya memajukan bangsa ini di masa mendatang.

Selanjutnya perkenalkan saya menyampaikan penghargaan dan ucapan terimakasih kepada para sponsor yang telah mendukung pelaksanaan seminar ini, serta panitia pelaksana seminar yang telah mempersiapkan pelaksanaan seminar ini sehingga berjalan dengan baik dan lancar.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Rektor UAD

Dr. Kasiyarno, M.Hum

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
KATA PENGANTAR .....	ii
SAMBUTAN KAPRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA .....	iii
SAMBUTAN REKTOR UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN .....	v
<b>STRATEGI <i>MNEMONIC</i> DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA .....</b>	<b>1</b>
<b>PENGARUH PENGGUNAAN MODEL <i>STUDENT FACILITATOR AND EXPLAINING</i> BERBANTUAN DOMINO MATEMATIKA TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA .....</b>	<b>12</b>
<b>PENERAPAN MODEL MATEMATISASI BERJENJANG PADA MATERI PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN BILANGAN BULAT .....</b>	<b>20</b>
<b>PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF PENDEKATAN STRUKTURAL <i>NUMBERED HEADS TOGETHER</i> (NHT) UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR MATEMATIKA SISWA KELAS VIII-A SMP NEGERI 23 PEKANBARU.....</b>	<b>32</b>
<b>PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN <i>TREFFINGER</i> TERHADAP KEMAMPUAN BERPIKIR ALJABAR DAN KEMANDIRIAN BELAJAR SISWA .....</b>	<b>42</b>
<b>Studi Kasus: Perkembangan Kemampuan Penalaran Matematis Siswa Kelas V Sekolah Dasar Melalui Penerapan Metode Menulis Jurnal Dalam Pembelajaran Matematika .....</b>	<b>52</b>
<b>PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN CORE (<i>CONNECTING, ORGANIZING, REFLECTING</i> DAN <i>EXTENDING</i>) DENGAN PENDEKATAN <i>SCIENTIFIC</i> UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA.....</b>	<b>66</b>
<b>Pengaruh Penerapan Pembelajaran Kooperatif Tipe <i>Think Talk Write</i> terhadap Pemahaman Konsep Matematis Siswa Kelas VIII SMP .....</b>	<b>79</b>
<b>PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF PENDEKATAN STRUKTURAL <i>NUMBERED HEADS TOGETHER</i> (NHT) UNTUK MENINGKATKAN HASIL BELAJAR</b>	

<b>MATEMATIKA SISWA KELAS XI IPA 6 SMA NEGERI 5 PEKANBARU .....</b>	<b>85</b>
<b>Pembelajaran Matematika Berbasis Otak .....</b>	<b>97</b>
<b>PENGARUH STRATEGI <i>THE POWER OF TWO</i> TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA.....</b>	<b>109</b>
<b>PENGARUH MODEL KOOPERATIF TIPE <i>SNOWBALL THROWING</i> DENGAN STRATEGI <i>STUDENT TEAM HEROIC LEADERSHIP</i> BERBANTUAN ALAT PERAGA UNTUK MENGEMBANGKAN KEMAMPUAN PENALARAN MATEMATIS SISWA .....</b>	<b>117</b>
<b>Analisis Kurikulum, Problematika dan Kasus Pembelajaran Matematika di Sekolah Pokok Bahasan Keliling dan Luas Lingkaran .....</b>	<b>128</b>
<b>Sudut Pandang Siswa terhadap <i>Mathematical Beauty</i> dan Perannya.....</b>	<b>140</b>
<b>Pembelajaran Matematika dengan Menggunakan Pendekatan <i>Model Eliciting Activities (MEAs)</i> untuk Meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematik Siswa SMP.....</b>	<b>147</b>
<b>Mengembangkan Ranah Kognitif dan Afektif <i>Adolescence</i> melalui Pembelajaran Matematika .....</b>	<b>160</b>
<b>Penerapan Asesmen Portofolio Berbantuan CD Interaktif dalam Kemampuan Representasi Matematis Siswa SMP .....</b>	<b>173</b>
<b>Pengaruh Pendekatan Investigasi terhadap Kemampuan Pemahaman Matematis dan Disposisi Matematis Siswa .....</b>	<b>180</b>
<b>KUALITAS ALAT EVALUASI MATEMATIKA DALAM KEMAMPUAN KOGNITIF DAN ANALISISNYA .....</b>	<b>191</b>
<b>STUDI LITERATUR: MODEL PEMBELAJARAN SINEKTIK UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KREATIF MATEMATIS DAN <i>SELF CONFIDENCE</i> SISWA.....</b>	<b>199</b>
<b>Analisa Dampak Sistem Evaluasi Mandiri Dan Sistem Evaluasi Bersama Terhadap Prestasi Belajar Mahasiswa Baru ITS .....</b>	<b>212</b>
<b>ENHANCE MATHEMATICS LEARNING OUTCOMES OF SOCIAL SCIENCE OF SENIOR HIGH SCHOOL STUDENT'S THROUGH COOPERATIVE LEARNING <i>NUMBEREDS HEAD TOGETHER</i> .....</b>	<b>218</b>
<b>Diagnosis Kesalahan Konsep Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV) pada Siswa SMP Kota Bengkulu.....</b>	<b>230</b>

<b>MENINGKATKAN KEMAMPUAN HEURISTIK SISWA SMP MELALUI PENDEKATAN METAKOGNITIF .....</b>	<b>243</b>
<b>PEMANFAATAN TEKNOLOGI INFORMASI DAN KOMUNIKASI DENGAN SOFTWARE GEOGEBRA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA.....</b>	<b>252</b>
<b>Meningkatkan Pemahaman Konsep Operasi Hitung Bilangan Bulat Melalui Metode Bermain Peran Dalam Permainan Kotak Bus Pada Kelas IV SDN 87 Buttakeke.....</b>	<b>262</b>
<b>Meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematik Siswa SMP menggunakan Pendekatan <i>Open-ended</i> .....</b>	<b>274</b>
<b>PENERAPAN METODE ACCELERATED LEARNING DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA TERHADAP KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA SMP.....</b>	<b>288</b>
<b>PENERAPAN PENDEKATAN KONTEKSTUAL DENGAN PEMBERIAN TUGAS <i>MIND MAP</i> SETELAH PEMBELAJARAN TERHADAP PENINGKATAN KEMAMPUAN KONEKSI MATEMATIS SISWA SMP.....</b>	<b>297</b>
<b>Pembelajaran Matematika Humanistik Untuk Mengembangkan Ranah Kognitif dan Afektif Siswa.....</b>	<b>306</b>
<b>PENENTUAN FORMULASI MATEMATIKA DARI SUSUNAN AWAL KARTU PADA PERMAINAN KARUT DENGAN LONCATAN DUA KARTU .....</b>	<b>319</b>
<b>PENGARUH PEMBELAJARAN <i>MATH GAMES METHOD</i> TERHADAP PENINGKATAN KECERDASAN LOGIS MATEMATIS SISWA SMP.....</b>	<b>338</b>
<b>PENERAPAN PENDEKATAN PEMBELAJARAN <i>OPEN-ENDED</i> UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUANKONEKSI MATEMATIS SISWA .....</b>	<b>352</b>
<b>TINGKAT KREATIVITAS SISWA DALAM MEMECAHKAN MASALAH MATEMATIKA DIVERGEN DITINJAU DARI GAYA BELAJAR SISWA .....</b>	<b>361</b>
<b>PENERAPAN <i>TEACHING WITH ANALOGIES</i> DISERTAI MODEL 5E (<i>ENGAGE, EXPLORE, EXPLAIN, ELABORATE, AND EVALUATE</i>) UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PENALARAN SISWA SMP .....</b>	<b>372</b>



<b>PENGEMBANGAN MEDIA PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERUPA CD PEMBELAJARAN INTERAKTIF PADA MATERI BANGUN RUANG SISI DATAR DI KELAS VIII SMP .....</b>	<b>384</b>
<b>HUBUNGAN ANTARA KEMAMPUAN NUMERIK DENGAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIK SISWA DI SMP .....</b>	<b>397</b>
<b>Pembelajaran melalui Pendekatan Konstruktivisme untuk Meningkatkan Aktivitas Siswa dan Prestasi Matematika.....</b>	<b>404</b>
<b>PENINGKATAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH, KOMUNIKASI MATEMATIS MELALUI PENDEKATAN KETERAMPILAN METAKOGNITIF DENGAN MEMPERHATIKAN GAYA KOGNITIF SISWA SMP .....</b>	<b>418</b>
<b>PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN VAK (VISUAL, AUDITORI DAN KINESTETIK) BERBASIS <i>OPEN-ENDED PROBLEM</i> UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN BERPIKIR KREATIF MATEMATIS SISWA.....</b>	<b>432</b>
<b>PENERAPAN PEMBELAJARAN MATEMATIKA GASING UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PEMAHAMAN SISWA SEKOLAH DASAR PADA PEMBAGIAN.....</b>	<b>438</b>
<b>Penerapan Pembelajaran Matematika GASING untuk Meningkatkan Kemampuan Pemahaman Matematis Siswa Kelas III Sekolah Dasar pada Perkalian .....</b>	<b>454</b>
<b>STRATEGI PEMBELAJARAN KONFLIK KOGNITIF (<i>COGNITIVE CONFLICT</i>) UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMUNIKASI MATEMATIS SISWA SMP .....</b>	<b>465</b>
<b>Analisis Hambatan Belajar (<i>Learning Obstacle</i>) Pada Mata Kuliah Kalkulus III.....</b>	<b>474</b>
<b>PENGARUH SOFTWARE MATEMATIKA UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN KOMUNIKASI DAN MINAT BELAJAR SISWA DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA.....</b>	<b>485</b>
<b>PENGEMBANGAN BAHAN AJAR BERBASIS PROYEK BERBANTUAN ICT DAN INSTRUMEN UNTUK MENINGKATKAN KEMAMPUAN PENALARAN, KOMUNIKASI STATISTIS SERTA <i>ACADEMIC HELP-SEEKING</i> MAHASISWA .....</b>	<b>499</b>
<b>Pengembangan Perangkat Pembelajaran Materi Logika Matematika dengan Pendekatan PMRI untuk Siswa SMA Kelas X .....</b>	<b>515</b>

<b>Pengaruh Motivasi dan Aktivitas dalam Pendekatan Pembelajaran Konstruktivisme terhadap Kemampuan Pemahaman dan Penalaran Matematis pada Mata Kuliah Aljabar Linear 1 .....</b>	<b>525</b>
<b>Efektivitas Pembelajaran Matematika Menggunakan Metode <i>Group Investigation</i> Dengan Pendekatan Matematika Realistik terhadap Pemahaman Konsep dan Komunikasi Matematis Siswa Kelas VII .....</b>	<b>536</b>
<b><i>PROBLEM-BASED LEARNING: MENINGKATKAN KEMAMPUAN METAKOGNITIF SISWA SMA .....</i></b>	<b>547</b>
<b>PENGARUH PENDEKATAN KETERAMPILAN PROSES DENGAN STRATEGI “MARTIN” TERHADAP KEMAMPUAN PENALARAN MATEMATIS SISWA.....</b>	<b>560</b>
<b>PROSES BERPIKIR GEOMETRI SISWA TUNANETRA DALAM MEMAHAMI SEGIEMPAT DENGAN MENGGUNAKAN TEORI BERPIKIR VAN HIELE .....</b>	<b>569</b>
<b>Pemanfaatan Software Geogebra Berbantuan E-Learning dalam Pembelajaran Geometri.....</b>	<b>578</b>
<b>PENGARUH BAHAN AJAR MATEMATIKA BERBASIS KONSTRUKTIF ISLAMI TERHADAP PENINGKATAN KEMAMPUAN MENGAJAR MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA.....</b>	<b>587</b>
<b>Pengaruh Pendekatan Saintifik Berbasis <i>Assessment for Learning</i> pada Pembelajaran Geometri Dalam Meningkatkan <i>Self-Concept</i> Matematis Siswa .....</b>	<b>600</b>
<b>PROFIL KEMAMPUAN NUMBER SENSE SISWA SEKOLAH DASAR KELAS VI DALAM MENYELESAIKAN SOAL OPERASI BILANGAN BULAT .....</b>	<b>613</b>
<b>Penerapan Pendekatan Saintifik dan Model Pembelajaran <i>Problem Based Learning</i> pada Materi Limit Fungsi dalam Meningkatkan Motivasi Belajar Matematika Siswa.....</b>	<b>627</b>
<b>Modifikasi Metode Pembelajaran <i>Problem Posing</i> dengan Pendekatan CTL untuk Meningkatkan Prestasi Belajar Siswa .....</b>	<b>640</b>
<b>UPAYA MENINGKATKAN AKTIVITAS BELAJAR MATEMATIKA MELALUI MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE <i>TWO STAY TWO STRAY</i> PADA SISWA KELAS XI IPA 2 SMA MUHAMMADIYAH IMOIRI .....</b>	<b>647</b>

<b>PENGEMBANGAN BAHAN AJAR MATEMATIKA DENGAN MEMANFAATKAN PROGRAM GEOGEBRA UNTUK MENINGKATKAN PEMAHAMAN KONSEP DAN KEMANDIRIAN BELAJAR SISWA PADA POKOK BAHASAN TRANSFORMASI (Suatu Penelitian Pengembangan).....</b>	<b>658</b>
<b>EKSPERIMENTASI MODEL PEMBELAJARAN <i>DISCOVERY LEARNING</i> (DL) BERBASIS <i>ASSESSMENT FOR LEARNING</i> (AFL) MELALUI <i>PEER ASSESSMENT</i> .....</b>	<b>670</b>
<b>PENINGKATAN INTERAKSI BELAJAR SISWA MENGGUNAKAN MODEL BELAJAR KELOMPOK PADA SISWA KELAS VII SEKOLAH MENENGAH PERTAMA .....</b>	<b>677</b>
<b><i>Mind Map</i>, Alternatif Pembelajaran untuk Meningkatkan Kemampuan Representasi dan Disposisi Matematis .....</b>	<b>687</b>
<b>Fenomena Pemberian PR Dalam Usaha Meningkatkan Kualitas Sumber Daya Manusia (SDM) .....</b>	<b>697</b>
<b>EKSPERIMENTASI MODEL PEM BELAJARAN <i>THINK PAIR SHARE</i> (TPS) BERBASIS <i>ASSESSMENT FOR LEARNING</i> (AFL) MELALUI <i>PEER ASSESSMENT</i> .....</b>	<b>710</b>
<b>PEMBELAJARAN LANGSUNG YANG TERMODIFIKASI UNTUK MENINGKATKAN PRESTASI BELAJAR DAN EFIKASI DIRI MAHASISWA PADA MATA KULIAH GEOMETRI ANALITIK .....</b>	<b>719</b>
<b>MENGGUNAKAN SEJARAH MATEMATIKA DALAM PEMBELAJARAN VOLUM BANGUN RUANG DENGAN PENDEKATAN PMRI .....</b>	<b>727</b>
<b>Penggunaan Pemahaman Intuitif Siswa Kelas 5 SD dalam Menyelesaian Masalah Persen .....</b>	<b>738</b>
<b>PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE <i>TALKING CHIPS</i> BERBANTUAN CD PEMBELAJARAN <i>CAMTASIA</i> TERHADAP KEMAMPUAN PEMAHAMAN MATEMATIS .....</b>	<b>751</b>
<b>DESAIN DIDAKTIS BAHAN AJAR PERTIDAKSAMAAN.....</b>	<b>758</b>
<b>Profil penyelesaian Soal Cerita Siswa Sekolah Dasar Pada Materi Pecahan Ditinjau Dari Gender .....</b>	<b>772</b>
<b>ANALISIS PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN MATEMATIKA MODEL PLOM PADA SISWA SMK JURUSAN OTOMOTIF UNTUK MATERI BARISAN DAN DERET .....</b>	<b>781</b>

<b>INTERAKSI BELAJAR MATEMATIKA SISWA DALAM PEMBELAJARAN KOOPERATIF .....</b>	<b>801</b>
<b>Tingkatan Koneksi Matematis Siswa MTs pada Pemecahan Masalah Terapan Sistem Persamaan Linear .....</b>	<b>807</b>
<b>MENINGKATKAN HASIL BELAJAR DENGAN MODEL PEMBELAJARAN <i>THINK PAIR SHARE</i> (TPS) MATERI BILANGAN BULAT PADA SISWA KELAS IV SD .....</b>	<b>820</b>
<b>ASESMEN AUTENTIK (SIKAP DAN KETERAMPILAN) DAN PROBLEMANYA.....</b>	<b>832</b>
<b>Meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematik Mahasiswa Pada Mata Kuliah Teori Grup Melalui Pembelajaran Tutor Sebaya .....</b>	<b>843</b>
<b>MENDORONG KEMAMPUAN MAHASISWA DALAM MEMECAHKAN MASALAH MELALUI KEGIATAN PEMBELAJARAN BERMAKNA UNTUK MENINGKATKAN KUALITAS PEMAHAMAN PADA MATA KULIAH TEORI PROBABILITAS .....</b>	<b>854</b>
<b>PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN “BUSAKA” (BUKU SAKU STATISTIKA) DENGAN MODEL 4D-THIAGARAJAN.....</b>	<b>865</b>
<b>PENERAPAN TEORI BELAJAR KONSTRUKTIVISME DENGAN MODEL KOOPERATIF TPS UNTUK MENINGKATKAN AKTIVITAS DAN HASIL BELAJAR MAHASISWA PADA MATA KULIAH ALJABAR LINIER.....</b>	<b>886</b>
<b>Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Model Kooperatif Tipe <i>Team Assisted Individualization</i> Berbasis Konstruktivisme untuk meningkatkan kemampuan berpikir kreatif .....</b>	<b>895</b>
<b>Model Matematika Aliran Konveksi Campuran Pada Fluida Viskoelastik <i>Magnetohydrodynamics</i> (MHD) Yang Melewati Silinder Sirkular Berpori.....</b>	<b>903</b>
<b>Karakteristik Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan <i>Eigenmode</i> dari Matriks Tak Tereduksi dalam Aljabar Max-Plus .....</b>	<b>912</b>
<b>Analisis Dinamik Model Epidemik Tipe <i>SEIT</i> dengan Perbedaan Periode Laten dan Tingkat Kejadian Tersaturasi .....</b>	<b>924</b>
<b>MODEL ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN YANG MELEWATI PERMUKAAN SEBUAH BOLA .....</b>	<b>936</b>

<b>PEMODELAN DAN ANALISIS KESTABILAN MODEL DIVERSIFIKASI BERAS DAN NON-BERAS DENGAN PEMBERIAN SUBSIDI PADA NON-BERAS.....</b>	<b>948</b>
<b>Pelabelan Total Super <math>(a,d)</math>-<math>H</math>-Covering Pada Amalgamasi Star .....</b>	<b>959</b>
<b>Fluida Viskos-Elastis yang Melewati Pelat Datar dengan Memperhatikan Faktor Hidrodinamika.....</b>	<b>969</b>
<b>PELABELAN GRACEFUL PADA GRAF DRAGON GANDA <math>2D_n</math> (m ) UNTUK <math>n=3</math> dan <math>m \geq 3</math> .....</b>	<b>978</b>
<b>Model Rantai Pasok Menggunakan <i>Petri Net</i> dan Aljabar <i>Max Plus</i> dengan Mempertimbangkan Prioritas Transisi.....</b>	<b>985</b>
<b>Penerapan Twin Bounded Support Vector Machine untuk Prediksi Tingkat Pencemaran Bahan Organik di Sungai Kali Surabaya. ....</b>	<b>1003</b>
<b>Desain dan Analisa Sistem Kendali Gerak pada Sistem Propulsi dan <i>Fin</i> Kapal Selam Tanpa Awak (<i>Autonomous Underwater Vehicle</i>) .....</b>	<b>1014</b>
<b>MODEL MATEMATIKA ALIRAN KONVEKSI BEBAS FLUIDA VISKOELASTIK YANG MELEWATI PERMUKAAN SEBUAH BOLA.....</b>	<b>1025</b>
<b>KENDALI OPTIMAL SISTEM PERGUDANGAN DENGAN PRODUKSI YANG MENGALAMI KEMEROSOTAN.....</b>	<b>1038</b>
<b>Estimasi Posisi Kapal Selam Tanpa Awak Berdasarkan Lintasannya dengan Menggunakan metode <i>Extended Kalman Filter</i> .....</b>	<b>1052</b>
<b>MODEL MATEMATIKA ALIRAN FLUIDA VISKOELASTIS YANG MELEWATI SILINDER SIRKULAR .....</b>	<b>1062</b>
<b>Model Asimetris EGARCH Volatilitas Return Indeks Saham pada Pasar Saham Syariah dan Konvensional.....</b>	<b>1071</b>
<b>Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-Graf Hasil Operasi <i>Comb</i>.....</b>	<b>1080</b>
<b>Analisis Dinamik Model Prey Predator Pada Udang Windu (<i>Paneus Monodon</i>) di Tambak Tradisional .....</b>	<b>1093</b>
<b>DIMENSI METRIK BINTANG GRAF JAHANGIR <math>J_{k,s}</math> dengan <math>k \geq 4</math> dan <math>s = 2</math> .....</b>	<b>1100</b>
<b>Dimensi Partisi Graf Garis dari Graf <i>Friendship</i> <math>K_1 + mK_2</math> .....</b>	<b>1108</b>
<b>Deteksi Kecacatan Peluru Berbasis Citra Digital Menggunakan <i>Modified Line Detection</i>.....</b>	<b>1117</b>

<b>Pemodelan Bayesian SUR Spasial <i>Autoregressive</i> pada Kasus Heteroskedastisitas .....</b>	<b>1124</b>
<b>Deteksi <i>Abnormality</i> melalui BIRADS untuk Memprediksi Posisi dan Potensi Keganasan Kanker pada Kasus Kanker Payudara (<i>Ca mammae</i>) di Jawa Timur dengan Pendekatan Multinomial Normit Analysis .....</b>	<b>1137</b>
<b>Penerapan Logika Fuzzy Mamdani untuk Diagnosa Penyakit Hipertiroid .....</b>	<b>1146</b>
<b>JARINGAN SYARAF <i>RADIAL BASIS FUNCTION</i> (RBF) UNTUK KLASIFIKASI PENYAKIT KARIES GIGI .....</b>	<b>1158</b>
<b>Studi Penerapan Bus Sekolah di Jombang Menggunakan Aljabar Max-Plus .....</b>	<b>1167</b>
<b>MODIFIKASI DISTRIBUSI PERJALANAN COMMUTER LINE JABODETABEK DENGAN MODEL GRAVITASI VOORHEES .....</b>	<b>1175</b>
<b>Pengaruh Tingkat Kemiringan Tanah dan Pola Tanam Graf Tangga Segitiga Terhadap Sirkulasi Udara Pada Perkebunan Kopi .....</b>	<b>1181</b>
<b>PERUBAHAN NILAI TUKARIMPOR DAN HARGA KONSUMEN DI KAMBOJA DAN INDONESIA: BUKTI DARI VEKTOR AUTOREGRESI (VAR) .....</b>	<b>1187</b>
<b>KARAKTERISASI IDEAL MAKSIMAL <i>FUZZY NEAR-RING</i> .....</b>	<b>1199</b>
<b>Metode Numerik Pada Persamaan Diferensial Parsial Dengan Metode Beda Hingga .....</b>	<b>1208</b>
<b>Solusi Numerik Persamaan Diferensial Parsial Dengan Metode Sapuan Ganda .....</b>	<b>1214</b>
<b>Mengkonstruksi Algoritma Bentuk Numerik Pada Sistem Persamaan Linear .....</b>	<b>1222</b>
<b>Pemodelan GSTARX Dengan Intervensi <i>Pulse</i> dan <i>Step</i> Untuk Peramalan Wisatawan Mancanegara .....</b>	<b>1230</b>
<b>Nilai Strong Rainbow Connection pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya .....</b>	<b>1242</b>
<b>PENGEMBANGAN TOTAL SELIMUT SUPER PADA GRAF SHACKLETRIANGULAR BOOK .....</b>	<b>1249</b>
<b>BILANGAN KROMATIK PADA PENGOPERASIAN GRAF LINTASAN DENGAN GRAF LINGKARAN .....</b>	<b>1257</b>
<b>PELABELAN TOTAL SUPER (a, d)-SISI ANTIMAGIC PADA GABUNGAN SALING LEPAS GRAF DAUN <math>mLgn</math> .....</b>	<b>1263</b>

<b>SUPER(a,d)-H ANTI MAGIC TOTAL COVERING PADA GABUNGAN SALING LEPAS GRAF TRIANGULAR LADDER .....</b>	<b>1271</b>
<b>PELABELAN TOTAL SUPER (a,d)-SISI ANTI MAGIC PADA GABUNGAN SALING LEPAS GRAF SEMI PARASUT .....</b>	<b>1280</b>
<b>SUPER (A,D)-H-ANTIMAGIC TOTAL COVERING PADA GRAF SEMI WINDMILL .....</b>	<b>1287</b>
<b>Pewarnaan Titik pada Operasi-Operasi Graf Roda .....</b>	<b>1296</b>
<b>Dominating Set Dan Total Dominating Set Dari Graf-Graf Khusus .....</b>	<b>1301</b>
<b>Keantimagikan Super Total Selimut pada Gabungan Saling Lepas Graf Shackle Triangular Book .....</b>	<b>1308</b>
<b>BILANGAN DOMINASI PADA GRAF HASIL OPERASI .....</b>	<b>1321</b>
<b>Analisis Sirkulasi Udara Pada Tanaman Kopi Berdasarkan Faktor Tanaman Pelindung dan Pola Tanam Graf Tangga Menggunakan Metode Volume Hingga .....</b>	<b>1326</b>
<b>Pelabelan Super (a; d)-Edge Antimagic Total dari Sackle Graf Buku Berorder Tiga Super (a; d)-Edge Antimagic Total Labeling Of Book Of Order Three .....</b>	<b>1334</b>
<b>Model <i>Mixture Survival</i> Spasial Pada Angka Lama Sekolah Anak Umur 16-18 Tahun di Provinsi Jawa Timur Tahun 2012 .....</b>	<b>1339</b>
<b>METODE <i>FAST DOUBLE BOOTSTRAP</i> PADA REGRESI SPASIAL DATA PANEL DENGAN <i>SPATIAL FIXED EFFECT</i> (Studi Kasus : Persentase Penduduk Miskin di Provinsi NTB) .....</b>	<b>1349</b>
<b>Studi Simulasi Grafik Pengendali <i>T2</i> Hotelling untuk Pengamatan Individual Menggunakan Estimator <i>Robust</i> RMCD .....</b>	<b>1358</b>
<b>Pemodelan Pemberian Imunisasi Dasar dan ASI Eksklusif Menggunakan Regresi Probit Biner Bivariat di Provinsi Kalimantan Selatan .....</b>	<b>1372</b>
<b>Peramalan Data Musiman Dengan Model Winter .....</b>	<b>1382</b>
<b>Pemodelan Produksi Kedelai di Provinsi Jawa Tengah menggunakan Dua Proses Spasial .....</b>	<b>1388</b>
<b>APLIKASI METODE <i>PARTIAL LEAST SQUARES</i> (PLS) DALAM PEMODELAN PRESTASI MAHASISWA BIDIK MISI FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM (FMIPA) UNIVERSITAS SRIWIJAYA ANGKATAN 2010-2012 .....</b>	<b>1393</b>

<b>PEMODELAN PRESTASI MAHASISWA BIDIK MISI UNSRI DENGAM MODEL PERSAMAAN STRUKTURAL (<i>STRUCTURAL EQUATION MODELS</i>) (DENGAN METODE ESTIMASI <i>MAXIMUM LIKELIHOOD</i>) .....</b>	<b>1407</b>
<b>ESTIMASI PROBIT DATA PANEL MODEL <i>RANDOM EFFECT</i> .....</b>	<b>1425</b>
<b>PEMODELAN DAN PENYELESAIAN NUMERIK POLA PENYEBARAN ASAP DARI CEROBONG PABRIK GULA PT. SEMBORO JEMBERJAWA TIMUR DENGAN MENGGUNAKAN METODE VOLUME HINGGA .....</b>	<b>1432</b>
<b>Pelabelan Total Super (a,d)-sisi Antimagic pada Gabungan Graf Buah Naga .....</b>	<b>1439</b>
<b>The Rainbow Connection Number of Special Graphs .....</b>	<b>1445</b>
<b>Pelabelan Total Super (a,d)-sisi Antimagic pada Gabungan Graf Rem Cakram .....</b>	<b>1449</b>
<b>Algoritma Penjadwalan Perkuliahan dengan Kasus <i>Team Teaching</i> dengan Metode <i>Vertex Coloring Graph</i> .....</b>	<b>1458</b>



## MODEL ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN YANG MELEWATI PERMUKAAN SEBUAH BOLA

Mohammad Ghani<sup>a</sup>, Basuki Widodo<sup>b</sup>, Chairul Imron<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)  
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111, [mohghani08@yahoo.co.id](mailto:mohghani08@yahoo.co.id)

<sup>b</sup>Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)  
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111, [b\\_widodo@matematika.its.ac.id](mailto:b_widodo@matematika.its.ac.id)

<sup>c</sup>Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)  
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111, [imron\\_its@matematika.its.ac.id](mailto:imron_its@matematika.its.ac.id)

### ABSTRAK

Aliran konveksi campuran merupakan perpaduan antara aliran konveksi bebas (*free convection flow*) dan aliran konveksi paksa (*forced convection flow*). Dalam hal ini, pengaruh aliran gaya yaitu gaya tekanan (*pressure forces*) dan gaya apung (*buoyant forces*) pada aliran konveksi bebas menjadi signifikan. Aliran konveksi campuran dapat digunakan pada teknologi reaksi reaktor dan pendingin elektronik. Di dalam tesis ini persamaan lapisan batas (*boundary layer*) aliran konveksi campuran fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola awalnya ditransformasikan kedalam bentuk non-dimensi, kemudian ditransformasikan kedalam bentuk persamaan lapisan batas non-similar yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode skema Crank-Nicholson. Hasil numerik yang diperoleh yaitu gesekan kulit ( $C_f$ ), temperatur dinding ( $\theta_w(x)$ ), profil laju ( $f'$ ), dan profil temperatur ( $\theta$ ) dengan parameter viskoelastik ( $K$ ), konveksi campuran ( $\lambda$ ), bilangan Prandtl ( $P_r$ ).

**Kata kunci:** aliran konveksi campuran, fluida non-newtonian, viskoelastik, crank-nicholson, bilangan Prandtl

### ABSTRACT

Mixed convection flow is combination between free convection flow and forced convection flow. In this case, effect of force flow that is pressure forces and buoyant forces to be significant. Mixed convection flow can be used in reactor reaction technology and electronic cooling. In this thesis, the governing boundary layer equation mixed convection flow of viscoelastic fluid past the surface of a sphere is first transformed into non-dimension form, and then transformed into non-similar form that is then numerically solved by using Crank-Nicholson scheme. Numerical results obtained include skin friction ( $C_f$ ), wall temperature ( $\theta_w(x)$ ), velocity profile ( $f'$ ), and temperature profile ( $\theta$ ) with viscoelastic parameter ( $K$ ), mixed convection parameter ( $\lambda$ ), Prandtl number parameter ( $P_r$ ).

**Keywords:** mixed convection fluid, non-newtonian fluid, viscoelastic, crank-nicholson, Prandtl number

**Pendahuluan**

Perpindahan panas konvektif atau konveksi merupakan perpindahan panas dari suatu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh pergerakan fluida. Konveksi panas secara garis besar dibagi menjadi dua, yaitu konveksi bebas (*free convection*) dan konveksi paksa (*forced convection*). Konveksi bebas disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy forces*) karena perbedaan temperatur pada fluida. Saat fluida dipanaskan, perubahan densitas pada lapisan batas menyebabkan fluida yang dipanaskan naik dan berubah menjadi fluida yang lebih dingin, sedangkan fluida paksa atau yang disebut sebagai adveksi panas disebabkan oleh gaya luar. Saat aliran gaya pada konveksi bebas menjadi signifikan, proses tersebut disebut sebagai aliran konveksi campuran yang merupakan gabungan antara aliran konveksi bebas dan konveksi paksa. Di dalam tesis ini, pada mulanya persamaan lapisan batas ditransformasikan kedalam bentuk non-dimensi, kemudian ditransformasikan lagi kedalam bentuk non-similar yang diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga implisit yaitu metode Crank-Nicolson untuk permasalahan aliran konveksi campuran fluida viskoelastik yang

melewati permukaan sebuah bola. Permasalahan konveksi campuran atas sebuah bola telah banyak dilakukan beberapa penelitian karena penerapannya yang luas dalam bidang teknik seperti mengurangi hambatan benda dan bahkan menghasilkan daya angkat yang cukup untuk menumpu benda pada kondisi tertentu. Akhir – akhir ini, terdapat beberapa peneliti menyelidiki permasalahan aliran fluida yang melewati sebuah bola untuk berbagai jenis fluida. Molla, dkk (2005) meneliti tentang aliran konveksi bebas magnet dinamis pada bola dengan pembangkitan panas menggunakan metode kotak Keller. Amin, dkk (2002) meneliti aliran konveksi campuran dalam kondisi tunak (*steady*) dari fluida viskos tak mampu-mampat (*incompressible*) yang melewati sebuah bola pejal dengan temperatur konstan. Akhter dan Alim (2008) meneliti pengaruh radiasi pada aliran konveksi bebas yang melewati sebuah bola dengan fluks panas permukaan yang seragam. Kasim (2014) meneliti tentang aliran konveksi campuran dalam kondisi tunak (*steady*) dari fluida viskoelastik tak mampu-mampat (*incompressible*) yang melewati permukaan sebuah bola dengan penyelesaian numerik metode kotak Keller. Namun, permasalahan

aliran konveksi campuran dalam kondisi tak-tunak (*unsteady*) dari fluida viskoelastik mampu-mampat (compressible) dengan penyelesaian numerik metode implisit Crank-Nicolson belum banyak yang meneliti. Dalam penelitian ini, dianalisa pengaruh parameter viskoelastik ( $K$ ), parameter konveksi campuran ( $\lambda$ ), dan juga bilangan Prandtl ( $P_r$ ) yang mempengaruhi karakteristik aliran fluida dari gesekan kulit (*skin friction*) ( $C_f$ ), laju temperatur ( $f'$ ), dan profil temperatur ( $\theta$ ). Aliran fluida konveksi campuran yang mengalir pada suatu bola membentuk suatu lapisan batas lingkaran seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.1, dengan  $a$  merupakan jari – jari bola. Aliran lapisan batas konveksi campuran tak-tunak (*unsteady state*) merupakan model fisik dan sistem koordinat yang digunakan untuk mendapatkan solusi secara numerik dari suatu persamaan lapisan batas non-similar dengan menggunakan metode implisit Crank-Nicolson.

### Metode Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

## Tahapan Penelitian

### 1. Studi Literatur

Pada tahap ini studi literatur yang terkait dengan penelitian digunakan untuk membantu dalam proses penyelesaian permasalahan aliran konveksi campuran yang melewati sebuah bola. Contoh studi literatur yang terkait itu adalah navier-stokes, viskositas, aliran konveksi campuran, dan metode crank-Nicholson.

### 2. Pengkajian Model Matematika

Pada tahap ini melakukan pengkajian model matematika pada aliran konveksi campuran yang melewati sebuah bola sehingga mendapatkan model matematika sesuai dengan yang diharapkan berdasarkan karakteristik dari tiap-tiap model matematika.

### 3. Pengkonstruksian Model Matematika

Pada tahap ini pengkonstruksian model matematika suatu lapisan batas dari aliran konveksi campuran yang melalui permukaan sebuah bola berupa persamaan konservasi massa (kontinuitas), momentum, dan energi.

### 4. Penyelesaian Model Matematika

Pada tahap ini menggunakan metode implisit Crank-Nicholson

untuk mendapatkan diskritisasi dari permasalahan model matematika aliran konveksi campuran yang melewati sebuah bola.

### 5. Membuat Algoritma Program

Pada tahap ini membuat suatu algoritma berdasarkan hasil diskritisasi dengan metode implisit Crank-Nicholson pada model matematika aliran konveksi campuran yang melewati sebuah bola.

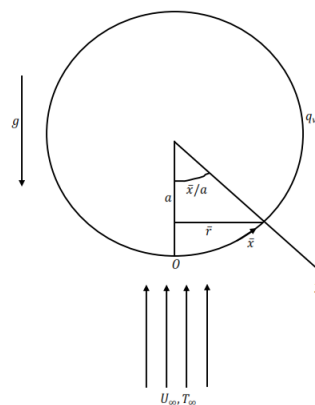
### 6. Simulasi Algoritma Program

Pada tahap ini melakukan suatu simulasi dengan menggunakan software MATLAB untuk melihat perilaku suatu model matematika aliran konveksi campuran yang melewati sebuah bola (hasil diskritisasi dengan metode implisit Crank-Nicholson).

### 7. Analisis Hasil dan Pembahasan.

Hasil yang diperoleh dari beberapa simulasi yang dilakukan dianalisis dan dibahas, untuk kemudian dicari solusi numerik terbaik dari aliran konveksi campuran yang melewati sebuah bola. dan membuat kesimpulan.

### Model Matematika



**Gambar 1. Aliran Konveksi Campuran yang Melewati Permukaan Sebuah Bola**

Gambar 1 adalah arah aliran konveksi campuran yang melewati permukaan sebuah bola secara vertikal dan lateral dengan laju fluida viskoelastik sebesar  $U_{\infty}$  dan temperatur fluida viskoelastik sebesar  $T_{\infty}$ . Titik  $O$  merupakan titik stagnasi, dengan kondisi saat  $\bar{x} = 0$  dan  $\bar{y} = 0$  sehingga laju fluida pada permukaan sebuah bola saat kondisi tersebut adalah  $\bar{u} = 0$  dan  $\bar{v} = 0$ . Laju aliran fluida viskoelastik di sepanjang permukaan sebuah bola pada saat posisi dan waktu tertentu membentuk sudut sebesar  $(\bar{x}/a)$  dan  $\bar{r}$ , dengan  $\bar{r}$  merupakan jarak dari sumbu simetris terhadap permukaan sebuah bola. Pada penelitian ini, separasi pada posisi dan waktu tertentu dari aliran fluida viskoelastik yang melawan gaya gesek dianalisa. Separasi dapat menyebabkan momentum aliran fluida viskoelastik berkurang. Sehingga ketika aliran fluida

viskoelastik mempunyai momentum yang kecil, hal tersebut dapat menyebabkan aliran fluida viskoelastik berbalik arah. Gaya luar dalam aliran konveksi campuran menyebabkan momentum yang dihasilkan dari fluida viskoelastik semakin besar. Gaya gesek antara permukaan sebuah bola dengan aliran fluida viskoelastik menyebabkan terjadinya perubahan nilai energi yang semakin berkurang. Selanjutnya, penurunan persamaan konservasi massa, konservasi momentum, dan konservasi energi dijelaskan secara detail pada pembahasan subbab selanjutnya.

## Hasil dan Pembahasan

### A. Model Matematika dalam Bentuk Dimensi

#### 1. Persamaan Kontinuitas

Laju perubahan terhadap waktu dari massa sistem yang berimpit = Laju perubahan terhadap waktu dari massa dari kandungan volume atur + Laju aliran netto dari massa melalui permukaan atur = 0. Secara matematis dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = 0 \quad (1)$$

Dalam notasi vektor, persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (2)$$

Sesuai fenomena aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola dalam kondisi *incompressible*, dapat dikonstruksi persamaan kontinuitas dalam bentuk dimensi sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{r}\bar{v}) = 0 \quad (3)$$

#### 2. Persamaan Momentum

Laju perubahan terhadap waktu dari momentum sistem = Laju perubahan terhadap waktu dari momentum kandungan volume atur + Laju aliran netto dari momentum melewati permukaan atur = Jumlah dari gaya-gaya luar yang bekerja pada sistem. Secara matematis dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \mathbf{V} + \int_{cs} \rho \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \mathbf{V} = \sum F \quad (4)$$

Dalam notasi vektor, persamaan diatas dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{V}) \right) = -\nabla P + \nabla \tau + \rho \mathbf{g} \quad (5)$$

Sesuai fenomena aliran konveksi bebas fluida viskoelastik yang melewati permukaan sebuah bola dalam kondisi *steady*, maka diperoleh persamaan momentum ke arah sumbu-*x* dan ke arah sumbu-*y* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \rho g_x \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \rho g_y \end{aligned} \quad (6)$$

selanjutnya untuk  $\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{xy}$ , dan  $\tau_{yy}$  merupakan *stress tensor* Cauchy untuk fluida Walter-B yang didefinisikan sebagai:

$$\tau_{ij} = -pI + \mu_0(2d_{ij}) - k_0(2\hat{d}_{ij}) \quad (7)$$

dengan:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{ij} &= \mathbf{V} \cdot \nabla (d_{ij}) - (d_{ij}) \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \cdot \mathbf{V} (d_{ij}) \end{aligned} \quad (8)$$

dan

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]; \quad (9)$$

untuk  $i = x, y$  dan  $j = x, y$

dengan mensubstitusikan persamaan (8) dan persamaan (9) ke persamaan (7) stres tensor sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_0 \left[ -6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yx} = \tau_{yx} = \mu_0 & \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ & - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ & + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ & - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{yx}}{\partial y} = \mu_0 & \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ & - k_0 \left[ u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right. \\ & + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \\ & + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \\ & - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ & - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ & \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (11) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{yx}}{\partial x} & = \mu_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ & - k_0 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right. \\ & - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\ & + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \\ & - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ & \left. - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \tau_{yy} = -p + 2\mu_0 & \frac{\partial v}{\partial y} \\ & - 2k_0 \left[ u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\ & - \\ & \left. 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (13) \end{aligned}$$

Kemudian pada Persamaan (11) sampai (13) dilakukan penurunan fungsi terhadap variabel x atau y seperti berikut ini:

Kemudian lakukan substitusi Persamaan (8) sampai (9) ke Persamaan (4), sehingga didapat persamaan momentum terhadap sumbu x dengan mendefinisikan  $F = \rho g$ , dengan

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, 0) \text{ dan } \mathbf{g} = (-g_x, -g_y, 0)$$

sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ &+ \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \\ \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\ &+ v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \\ \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Selanjutnya digunakan persamaan lapisan batas untuk mendapatkan bentuk persamaan yang lebih sederhana, yaitu diukur dalam bentuk 1 dan Δ. Maka diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \\ \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Pada aliran konveksi bebas, tekanan yang bekerja adalah kombinasi dari tekanan hidrostatis (*Ph*) dan tekanan dinamis (*Pd*), sehingga dapat ditulis:

$$P = Ph + Pd$$

dengan

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_\infty g_x$$

dan  $g_x = -g \sin\left(\frac{x}{a}\right)$ , maka Persamaan (16) menjadi:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ &+ g\beta(T - T_\infty) \sin\left(\frac{x}{a}\right) - \\ \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \right. \\ &\left. - \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \\ &= v \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + g\beta(T - T_\infty) \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \\ &- \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} \right. \\ &- \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) \\ &\left. + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

Persamaan Energi:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \\ &= \alpha \bar{v} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

Dengan kondisi batas:



$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -\frac{q_w}{k} \text{ pada } \bar{y} = 0,$$

$$\bar{u} = 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, T - T_\infty, \quad \text{sebagai } \bar{y} \rightarrow \infty.$$

**1. Model Matematika dalam Bentuk Non-Dimensi**

Selanjutnya, dengan menggunakan variabel berikut ini:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{a}, y = R_e^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{y}}{a} \right), r(x) \\ &= \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}, \\ u &= \frac{\bar{u}}{U_\infty}, v = R_e^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{v}}{U_\infty} \right) \\ \theta &= \frac{R_e^{\frac{1}{2}} (T - T_\infty) k}{q_w a}, u_e(x) \\ &= \frac{\bar{u}_e(\bar{x})}{U_\infty} \end{aligned}$$

Maka persamaan (1), (2), dan (3) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}}(ur) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(rv) &= 0 \\ \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) \right. \\ &+ v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \\ \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left( 3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} \right) \right] & \quad (15) \end{aligned}$$

Selanjutnya digunakan persamaan lapisan batas untuk mendapatkan bentuk persamaan yang lebih sederhana, yaitu diukur dalam bentuk 1 dan Δ. Maka diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \\ \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] & \quad (16) \end{aligned}$$

Pada aliran konveksi bebas, tekanan yang bekerja adalah kombinasi dari tekanan hidrostatik (*Ph*) dan tekanan dinamis (*Pd*), sehingga dapat ditulis:

$$P = Ph + Pd$$

dengan

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_\infty g_x$$

dan  $g_x = -g \sin \left( \frac{x}{a} \right)$ , maka Persamaan (16) menjadi:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= v \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ &+ g \beta (T - T_\infty) \sin \left( \frac{x}{a} \right) - \\ \frac{k_0}{\rho} \left[ u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \right. \\ &\left. - \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] & \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \\ &= v \left[ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + g\beta(T - T_\infty) \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) \\ & - \frac{k_0}{\rho} \left[ \bar{u} \left( \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right) + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} \right. \\ & - \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} \right) \\ & \left. + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

Persamaan Energi:

$$\begin{aligned} & \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \\ &= \alpha \bar{v} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

Dengan kondisi batas:

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = -\frac{q_w}{k} \text{ pada } \bar{y} = 0, \\ \bar{u} = 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, T - T_\infty, \quad \text{sebagai } \bar{y} \\ \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**2. Model Matematika dalam Bentuk Non-Dimensi**

Selanjutnya, dengan menggunakan variabel berikut ini:

$$\begin{aligned} x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{y}}{a} \right), r(x) \\ = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}, \\ u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, v = Re^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\bar{v}}{U_\infty} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = \frac{R_e^{\frac{1}{2}}(T - T_\infty)k}{q_w a}, u_e(x) \\ = \frac{\bar{u}_e(\bar{x})}{U_\infty} \end{aligned}$$

Maka persamaan (1), (2), dan (3) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(ur) + \frac{\partial}{\partial y}(rv) = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ + K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right. \\ \left. + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ + \lambda \theta \sin(x) \end{aligned}$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

dengan  $\lambda = \frac{Gr}{Re^{\frac{5}{2}}}$  dan kondisi batas

menjadi:

$$\begin{aligned} u = v = 0 \quad \theta' = -1 \quad \text{pada } y \\ = 0, \end{aligned}$$

$$u = 0, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, \theta = 0, y \rightarrow \infty,$$

Persamaan (4), (5), dan (6) disebut sebagai model matematika dalam bentuk non -dimensi.

**3. Prosedur penyederhanaan Model menggunakan fungsi arus**

Dengan menggunakan:

$$\psi = xr(x)f(x, y), \theta = \theta(x, y),$$

Maka:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

Kemudian disubstitusikan ke model dalam bentuk non-dimensi sebelumnya, didapat:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{9 \sin x \cos x}{4 x} \\ & + \left(1 + x \frac{\cos x}{\sin x}\right) f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ & + \lambda \theta \frac{\sin x}{x} \\ & + K \left[ 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right. \\ & \left. - \left(1 + x \frac{\cos x}{\sin x}\right) \left( f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 \right) \right] \\ & = Kx \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] \\ & + x \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right), \\ & \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \left(1 + x \frac{\cos x}{\sin x}\right) f \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ & = x \left( \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

dengan kondisi batas:

$$f = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \theta' = -1 \text{ pada } y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow \frac{3 \sin x}{2 x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

$$\theta \rightarrow 0 \text{ pada } y \rightarrow \infty.$$

Pada saat  $x \rightarrow 0$ , maka model

matematika menjadi:

$$\begin{aligned} & f''' + 2ff'' - f'^2 + \frac{9}{4} + \lambda \theta \\ & + 2K(f'f''' - ff'''' \\ & - f''^2) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Pr} \theta'' + 2f\theta' = 0,$$

Dengan kondisi batas:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \theta'(0) = -1$$

$$f'(\infty) = 0, f''(\infty) = 0, \theta(\infty) = 0,$$

### Kesimpulan

Pada penelitian ini terdapat suatu korelasi antara bilangan Prandtl ( $P_r$ ) profil temperatur yaitu semakin besar bilangan Prandtl maka menyebabkan profil temperatur semakin kecil karena difusivitas termal yang semakin menurun.

### Ucapan Terima Kasih

Penulis berterima kasih kepada Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc dan Dr. Chairul Imron, MI.Komp. atas

bimbingan dan saran yang telah diberikan selama penulisan artikel ini

### Pustaka

- Causon, D.M. dan Mingham, C.G. (2010). *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*, Departement Of Computing and Mathematics, UK.
- Hakim, Imansyah I. (2012), *Fenomena Thermophoresis Dan Pemanfaatannya Sebagai Thermal Precipitator Untuk Meningkatkan Kebersihan Udara*, Disertasi Doktor, Universitas Indonesia, Depok.
- Hoffmann, Klaus A. dan Chiang, Steve T. (2000), *Computational Fluid Dynamics*, Engeneering Education System, USA.
- Kasim, A.R.M. (2014), *Convective Boundary Flow of Viscoelastic Fluid*, Disertasi Ph.D., Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.
- Kreith, Frank. (1994), *Prinsip-Prinsip Perpindahan Panas*, Edisi Ketiga, Erlangga, Jakarta.
- Potter, Merlec C. dan Wiggert, David C. (2008). *Mekanika Fluida*, Erlangga, Jakarta.
- Salleh, M. Z. dan Nazar, R. (2010), *Modeling of Free Convection Boundary Layer Flow on a Sphere with Newtonian Heating*, Acta Appl. Math., 112: 263–274.
- Streeter, Victor L., Wyle, E. Benjamin, dan Prijno, Arko. (1988), *Mekanika Fluida*, Edisi Delapan, Erlangga, Jakarta.
- Widodo, Basuki. (2012), *Pemodelan Matematika*, Itspress, Surabaya