PROSIDING

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA IV 2008

(SemNasMat4-08)

ISBN : 978 – 979 - 96152

MATEMATIKA: PENGEMBANGAN DAN APLIKASINYA UNTUK MENDUKUNG PROSES KEMANDIRIAN DAN KEBANGKITAN BANGSA

Surabaya, 13 Desember 2008
Gedung Pasca Sarjana ITS Surabaya

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER SURABAYA

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA IV
Jurusan Matematika FMIPA–ITS
Kampus Keputih–Sukolilo
Sekretariat: Gedung U201
Telp. 031-5943354
Fax. 031-5996506

ISBN :978-979-96152

Susunan Panitia

- **Steering Committee:**

1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc	(ITS)
2. Prof. Hendra Gunawan, Ph.D	(ITB)
3. Prof. Dr. Sri Wahyuni, MS	(UGM)
4. Prof. Dr. Ketut Budayasa	(Unesa)
5. Dr. Mardjono, M.Phil	(UB)
6. Dr. Eridani, M.Si	(Unair)
7. Dr. Saib Suwilo, M.Sc.	(USU)
8. Dr. Mohammad Isa Irawan, MT	(ITS)
9. Dr. Subiono, M.Sc	(ITS)
10. Dr. Erna Apriliani, M.Si	(ITS)
11. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si	(ITS)
12. Dr. Toto Nusantara, M.Si	(UM)

- **Organizing Committee:**

1. Ketua Pelaksana	: Drs. Nurul Hidayat, M.Kom
2. Wakil Ketua Pelaks	: Drs. Kamiran, M.Si
3. Sekretaris	: Valeriana, S.Si, MT
4. Bendahara	: Dra. Farida A.W., MS

EDITOR :
1. **Drs. IG Ngurah Rai Usadha, M.Si**
2. **Pratita Ayu Inawati, S.Si**

Artikel dalam prosiding ini telah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika IV tahun 2008 pada 13 Desember 2008 di ITS Surabaya

SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA IV
Jurusan Matematika FMIPA–ITS
Kampus Keputih–Sukolilo
Sekretariat: Gedung U201
Telp. 031-5943354
Fax. 031-5996506

KATA PENGANTAR

Peranan dan kontribusi matematika di semua sendi kehidupan perlu didukung penyebarluasan hasil-hasil penelitian atau kajian dalam lingkup matematika dan aplikasinya di berbagai bidang ilmu pengetahuan maupun industri. Dalam rangka sosialisasi dan desiminasi karya bakti berupa hasil penelitian atau kajian di bidang matematika, maka Jurusan Matematika FMIPA ITS mengadakan Seminar Nasional Matematika yang ke-4 Tahun 2008 dengan Tema **”MATEMATIKA: PENGEMBANGAN DAN APLIKASINYA UNTUK MENDUKUNG PROSES KEMANDIRIAN DAN KEBANGKITAN BANGSA”.**

Prosiding ini disusun agar dapat memperoleh informasi lengkap tentang semua kegiatan dan makalah makalah yang terseleksi serta dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika yang ke-4, pada tanggal 13 Desember 2008, di Gedung Pascasarjana ITS. Kegiatan Seminar ini dihadiri ilmuwan yang bergelut dalam bidang Pemodelan dan Simulasi Sistem, Analisis dan Aljabar, Riset Operasi dan Pengolahan Data, Stokastik dan Probabilistik, Graph dan Terapannya, Komputasi dan Rekayasa dan Pembelajaran Matematika.

Mudah-mudahan prosiding ini menjadi petunjuk yang dapat membantu para pembaca dalam mengkaji dan mengembangkan matematika. Terima kasih

Surabaya, 13 Desember 2008

Panitia

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

DAFTAR ISI

Seminar Nasional Matematika IV (SemNasMat4)
Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 13 Desember 2008

ANALISIS MASALAH GENERATOR DARI *POSSIBLE* DAN *UNIVERSAL EIGENVECTOR* PADA MATRIKS INTERVAL DALAM ALJABAR MAX-PLUS

[1]Ratna Novitasari, [2]Subiono

[1,2] Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Jl. Arief Rahman Hakim, Kampus Keputih - Sukolilo, Surabaya 604444 – Jawa Timur

e-mail : [1] r4tn4nop@matematika.its.ac.id, [2] subiono2003@telkom.net

Abstrak. *Pada penelitian ini akan dibahas masalah eigenvalue dan eigenvector dari matriks interval dalam Aljabar Max-Plus. Eigenvalue dan eigenvector ini harus memenuhi matriks interval bawah dan atas. Dalam hal ini matriks interval tersebut dikatakan mempunyai possible eigenvalue dan universal eigenvalue serta possible eigenvector dan universal eigenvector. Kemudian akan ditentukan generator-generator dari himpunan semua possible eigenvector dan universal eigenvector dari suatu matriks interval. Juga akan ditentukan himpunan terbesar dari matriks interval jika diberikan suatu possible eigenvector dengan cara iterasi.*

Keywords: *Aljabar max-plus, eigenvalue, eigenvector, matriks interval*

1. Pendahuluan

Pada beberapa permasalahan, matriks digunakan untuk memodelkan suatu sistem dan sistem tersebut diselesaikan sehingga didapatkan solusinya. Untuk mendapatkan penyelesaian analitis dari sistem ini adakalanya menemui kesulitan dan lebih mudah menggunakan komputasi. Tetapi nilai komputasi dari matriks tersebut tidak tepat seperti keadaan yang sebenarnya. Hal ini menyebabkan adanya interval nilai dari sebuah matriks dalam komputasi dibandingkan keadaan yang sebenarnya. Sebuah matriks yang mempunyai interval data seperti ini dinamakan matriks interval. Pentingnya masalah matriks interval ini telah diketahui dan dipelajari dalam Aljabar biasa dan dicari penyelesaiannya (Cechlarova, 2005).

Aljabar max-plus sering digunakan untuk memodelkan suatu permasalahan seperti transportasi, manufakturing, penjadwalan, sistem antrian, lalu lintas dan lain sebagainya. Seperti halnya pada aljabar biasa, untuk menyelesaikan model tersebut muncul permasalahan adanya interval nilai yang menyebabkan adanya matriks interval. Karena itu, diperlukan analisis mengenai matriks interval untuk mendapatkan penyelesaiannya.

Seperti matriks biasa, matriks interval juga mempunyai *eigenvalue* dan *eigenvector*. Namun, pada matriks interval adanya interval nilai menyebabkan matriks tersebut mempunyai batas bawah dan batas atas sehingga *eigenvalue* dan *eigenvector* yang dimiliki matriks interval tersebut lebih sulit didapatkan daripada matriks biasa. Hal ini disebabkan *eigenvalue* dan *eigenvector* tersebut harus memenuhi matriks pada batas bawah dan matriks pada batas atas. Sehingga matriks interval mempunyai *possible eigenvalue* dan *universal eigenvalue* serta *possible eigenvector* dan *universal eigenvector*. Jika suatu *eigenvalue* hanya memenuhi salah satu matriks saja dari matriks interval, maka *eigenvalue* tersebut dinamakan *possible eigenvalue*, begitu juga dengan *possible eigenvector*. Sedangkan suatu *eigenvalue* dan *eigenvector* bisa dikatakan sebagai *universal eigenvalue* dan *universal eigenvector* jika memenuhi semua matriks pada batas atas dan batas bawah. (Cechlarova, 2005).

Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai *open problems* yang diberikan oleh Cechlarova (2005) yaitu menentukan generator-generator untuk himpunan semua *possible eigenvector* dari suatu matriks interval, langkah-langkah menentukan suatu matriks interval mempunyai *universal eigenvector* dan himpunan terbesar dalam suatu matriks interval apabila diberikan suatu *possible eigenvector*. Untuk menentukan nilai komputasi digunakan toolbox Aljabar Max-Plus dengan program Scilab–4.1.2.

2. Aljabar Max-Plus

Didefinisikan $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} -\infty$ dan $e \overset{\text{def}}{=} 0$. Himpunan $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$, dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan riil.
Adapun definisi dari struktur Aljabar dari $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ dijelaskan dalam definisi berikut ini:
Definisi 1. Struktur aljabar $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ (Bacelli dkk., 1992)
Simbol $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ menyatakan himpunan $\mathbb{R} \cup \varepsilon$ dengan dua operasi biner yaitu maksimum yang dinotasikan $\oplus$ dan penjumlahan yang dinotasikan $\otimes$. □

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{\text{maks}}$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ adalah $a \oplus b \overset{\text{def}}{=} \text{maks}(a, b)$ dan $a \otimes b \overset{\text{def}}{=} a + b$. Sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}_{\text{maks}}$ dan ε, didapatkan $a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$ dan $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$. Himpunan $\mathbb{R}_{\text{maks}}$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut Aljabar Max-Plus dan dinyatakan $\mathcal{R} = (\mathbb{R}_{\text{maks}}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$.

Himpunan matriks di dalam Aljabar Max-Plus dinyatakan dengan $\mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times m}$. Didefinisikan $\underline{n} \overset{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots n\}$. Elemen dari matriks $A \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times m}$ pada baris ke i dan kolom ke j dinyatakan dengan a_{ij}, untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Matriks A sebagaimana biasa dapat ditulis dengan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$. Operasi penjumlahan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times m}$, dinotasikan dengan $A \oplus B$, didefinisikan $[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \text{maks}(a_{ij}, b_{ij})$. Adapun operasi perkalian $A \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times m}$ dengan skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{\text{maks}}$, didefinisikan oleh $\alpha \otimes A = [\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}$. Sedangkan operasi perkalian matriks $A \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times l}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{l \times m}$, didefinisikan sebagai $A \otimes B = \bigoplus_{j=1}^{l} a_{ij} \otimes b_{jk} = \underset{j \in l}{maks}\{a_{ij} + b_{jk}\}$, dimana $i \in \underline{n}$ dan $k \in \underline{m}$.

Suatu graph dapat diubah menjadi bentuk matriks dan sebaliknya, dimana elemen-elemen dari matriks tersebut merupakan bobot dari *arc* pada graph yang didefinisikan sebagai berikut:
Definisi 2. *Precedence Graph* (Bacelli dkk., 1992)
Precedence graph dari matriks bujur sangkar A dengan elemennya a_{ij} adalah sebuah graph berarah berbobot dengan node n dan sebuah arc (j, i) jika $a_{ij} \neq \varepsilon$, dimana bobot pada *arc* ini adalah nilai dari a_{ij}. *Precedence graph* dinotasikan $\mathcal{G}(A)$. □

Dalam sebuah graph terdiri dari beberapa *node* yang saling berhubungan yang disebut *path*. Jika sebuah path mempunyai *node* awal sama dengan n*ode* akhir, maka *path* tersebut dinamakan *circuit*. Sebuah *circuit p* di $\mathcal{G}(A)$ disebut *critical* jika mempunyai bobot rata-rata maksimum. *Critical graph A* dinotasikan dengan $\mathcal{G}^{\mathcal{C}}(A)$ yaitu graph yang terdiri dari semua *node* dan *arc* yang menjadi anggota *critical circuit* di $\mathcal{G}(A)$. Semua node yang menjadi anggota $\mathcal{G}^{\mathcal{C}}(A)$ disebut *critical node*.

Adapun definisi *eigenvalue* dan *eigenvector* dalam Aljabar Max-Plus diberikan sebagai berikut:
Definisi 3. (Heidergott dkk., 2006)
Misalkan $A \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n \times n}$ adalah matriks bujur sangkar. Jika λ adalah sebuah skalar dan $v \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n}$ adalah sebuah vektor yang memuat minimal satu elemen yang berhingga sehingga memenuhi $A \otimes v = \lambda \otimes v$, maka λ disebut *eigenvalue* dari matriks A dan v adalah *eigenvector* dari matriks A yang bersesuaian dengan *eigenvalue* λ. □

Untuk mendapatkan *eigenvalue* dan *eigenvector* dari suatu matriks dalam Aljabar Max-Plus digunakan algoritma maxalgol (Subiono, 2007).

3. Matriks Interval

Matriks interval adalah himpunan semua matriks yang mempunyai interval nilai dan ditulis dalam bentuk $\mathbf{A} = \langle \underline{A}, \overline{A} \rangle$, dimana $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n\times n}$ dan $\underline{A} \le \overline{A}$. Matriks interval seperti dalam matriks biasa juga mempunyai *eigenvalue* dan *eigenvector*.

Diberikan definisi mengenai *eigenvalue* pada matriks interval adalah sebagai berikut:

Definisi 4. *Possible Eigenvalue* dan *Universal Eigenvalue* (Cechlarova, 2005)

Suatu bilangan riil λ adalah sebuah *possible eigenvalue* dari sebuah matriks interval **A** jika λ merupakan *eigenvalue* dari minimal satu matriks $A \in \mathbf{A}$. Suatu bilangan riil λ adalah sebuah *universal eigenvalue* dari sebuah matriks interval **A** jika λ merupakan *eigenvalue* dari tiap matriks $A \in \mathbf{A}$. □

Sedangkan pengertian *eigenvector* pada matriks interval didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 5. *Possible Eigenvector* dan *Universal Eigenvector* (Cechlarova, 2005)

Suatu vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n}$ adalah sebuah *possible eigenvector* dari sebuah matriks interval **A** jika ada $A \in \mathbf{A}$ sehingga $A \otimes \mathbf{x} = \lambda(A) \otimes \mathbf{x}$. Suatu vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n}$ adalah sebuah *universal eigenvector* dari sebuah matriks interval **A** jika $A \otimes \mathbf{x} = \lambda(A) \otimes \mathbf{x}$ untuk setiap matriks $A \in \mathbf{A}$. □

Contoh 1.

Diberikan matriks interval $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \langle 3,8 \rangle & \langle 2,4 \rangle & \langle 6,9 \rangle \\ \langle 4,6 \rangle & \langle 3,5 \rangle & -\infty \\ \langle -\infty,5 \rangle & \langle 2,8 \rangle & \langle 3,7 \rangle \end{pmatrix}$. Dengan menggunakan algoritma maxalgol, matriks $\underline{A}$ mempunyai *eigenvalue* $\lambda(\underline{A}) = 4$ dan matriks $\overline{A}$ mempunyai *eigenvalue* $\lambda(\overline{A}) = 8$. Karena $\lambda(\underline{A}) \ne \lambda(\overline{A})$, berarti matriks interval **A** tidak mempunyai *universal eigenvalue* hanya mempunyai *possible eigenvalue* yaitu $4 \le \lambda \le 8$.

Jika di ambil suatu vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, maka diperoleh $\underline{A} \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ dengan nilai $\lambda = \text{maks}_i (\underline{A} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x})_i = 8$.

Selanjutnya didapatkan nilai dari $A^* \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes x = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$ dan $\overline{A} \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$. Terlihat bahwa pada baris kedua dan ketiga, nilai $A^* \otimes x > \overline{A} \otimes x$ padahal seharusnya $\underline{A} \otimes x \le A^* \otimes x \le \overline{A} \otimes x$. Jadi, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bukan merupakan *possible eigenvector* untuk matriks interval **A**.

Jika di ambil suatu vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka $\underline{A} \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ dengan nilai $\lambda = \text{maks}_i (\underline{A} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x})_i = 4$.

Selanjutnya didapatkan nilai dari $A^* \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes x = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $\overline{A} \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$. Terlihat bahwa pada setiap baris memenuhi $\underline{A} \otimes x \le A^* \otimes x \le \overline{A} \otimes x$. Adapun nilai dari A^* diberikan oleh $a_{ij}^* = \min\{\overline{a}_{ij}, \lambda(\mathbf{x}) + x_i - x_j\}$.

sehingga didapatkan $A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & -\infty \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Karena $\underline{A} \le A^* \le \overline{A}$ dan $A^* \otimes \mathbf{x} = 4 \otimes \mathbf{x}$, maka $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah *possible eigenvector* untuk matriks interval **A** dengan $\lambda = 4$. ♦

Contoh 2.

Diberikan matriks interval $\mathbf{A}=\{A(c); c\in\langle -4,-3\rangle\}$, dimana $A(c)=\begin{pmatrix} -\infty & c & -\infty \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix}$. Dengan menggunakan algoritma maxalgol, didapatkan *eigenvalue* dari $\underline{A(c)}$ dan $\overline{A(c)}$ adalah sama dengan nol. Jadi, matriks *A* mempunyai *universal eigenvalue* $\lambda(A(c))=0$ untuk semua $c\in\langle -4,-3\rangle$. Dan *eigenvector* dari *A*(*c*) adalah $\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dimana *eigenvector* dari matriks $\underline{A(c)}$ adalah $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sedangkan *eigenvector* dari matriks $\overline{A(c)}$ adalah $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Jadi, matriks interval *A*(*c*) tidak mempunyai *universal eigenvector*.

Diberikan matriks interval $\mathbf{B}=\{B(c); c\in\langle -4,-3\rangle\}$, dimana $A(c)=\begin{pmatrix} -\infty & c & 0 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix}$ dengan matriks interval bawah $\underline{A(c)}=\begin{pmatrix} -\infty & -4 & 0 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix}$ dan matriks interval atas $\overline{A(c)}=\begin{pmatrix} -\infty & -3 & 0 \\ -\infty & -\infty & 1 \\ -\infty & -1 & -\infty \end{pmatrix}$. Didapatkan *eigenvalue* dari $\underline{B(c)}$ dan $\overline{B(c)}$ adalah sama dengan nol. Jadi, matriks *B* mempunyai *universal eigenvalue* $\lambda(B(c))=0$ untuk semua $c\in\langle -4,-3\rangle$. Sedangkan *eigenvector* dari *B*(*c*) adalah $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dimana *eigenvector* dari matriks $\underline{A(c)}$ dan *eigenvector* dari matriks $\overline{A(c)}$ adalah $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Jadi, matriks interval *B*(*c*) mempunyai *universal eigenvector*.

4. Generator Dari *Possible Eigenvector* dan *Universal Eigenvector*

Dalam menentukan suatu vektor merupakan *possible eigenvector* atau bukan dan jika merupakan *possible eigenvector* kemudian ditentukan matriks yang bersesuaian, diberikan dalam algoritma berikut:

Algoritma 1.

input : matriks interval **A** = $\langle \underline{A}, \overline{A} \rangle$ dan vektor *x*

output : *x possible eigenvector* dan matriks *A** atau *x* bukan *possible eigenvector*

$\lambda=\text{maks}(\underline{A}\otimes x - x)$

if $\underline{A}\otimes x \le \lambda \otimes x \le \overline{A}\otimes x$

    x adalah *possible eigenvector*

    $a_{ij}^{*}=\min\{\overline{a}_{ij}, \lambda + x_i - x_j\}$

    else

    x bukan *possible eigenvector*

end

Dengan menggunakan Algoritma 4.1. di atas, dilakukan beberapa pengujian kemungkinan generator dari *possible eigenvector* sebagai berikut:

Contoh 3.
Matriks interval yang diberikan pada Contoh 1.

a. *Eigenvector* dari matriks $\underline{A}$.

Jika di ambil *eigenvector* dari $\underline{A}$, yaitu $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, maka $\underline{A}\otimes\mathbf{x}=\begin{pmatrix}6\\6\\4\end{pmatrix}$ dengan $\lambda=4$. Didapatkan $A^*\otimes\mathbf{x}=\lambda\otimes x=\begin{pmatrix}6\\6\\4\end{pmatrix}$ dan $\overline{A}\otimes\mathbf{x}=\begin{pmatrix}10\\8\\10\end{pmatrix}$. Karena memenuhi $\underline{A}\otimes x\le A^*\otimes x\le\overline{A}\otimes x$ maka $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ adalah *possible eigenvector* untuk matriks interval **A** dengan *possible eigenvalue* $\lambda=4$ dan $A^*=\begin{pmatrix}4&4&6\\4&4&-\infty\\2&2&4\end{pmatrix}$.

b. *Eigenvector* dari matriks $\overline{A}$.

Jika di ambil *eigenvector* dari $\overline{A}$, yaitu $x=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$, maka $\underline{A}\otimes\mathbf{x}=\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$ dengan $\lambda=6$. Didapatkan $A^*\otimes\mathbf{x}=\lambda\otimes x=\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}$ dan $\overline{A}\otimes\mathbf{x}=\begin{pmatrix}8\\6\\6\end{pmatrix}$. Karena memenuhi $\underline{A}\otimes x\le A^*\otimes x\le\overline{A}\otimes x$, maka $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$ adalah *possible eigenvector* untuk matriks interval **A** dengan *possible eigenvalue* $\lambda=6$ dan $A^*=\begin{pmatrix}6&4&8\\4&5&-\infty\\4&6&6\end{pmatrix}$.

c. Rata-rata dari *eigenvector* matriks $\underline{A}$ dan *eigenvector* matriks $\overline{A}$.

Jika di ambil nilai rata-rata dari *eigenvector* $\underline{A}$ dan *eigenvector* $\overline{A}$ sehingga didapatkan $x=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, maka $\underline{A}\otimes\mathbf{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}$ dengan $\lambda=5$. Maka diperoleh $A^*\otimes\mathbf{x}=\lambda\otimes x=\begin{pmatrix}8\\7\\6\end{pmatrix}$ dan $\overline{A}\otimes\mathbf{x}=\begin{pmatrix}9\\7\\8\end{pmatrix}$. Karena memenuhi $\underline{A}\otimes x\le A^*\otimes x\le\overline{A}\otimes x$, maka $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ adalah *possible eigenvector* untuk matriks interval **A** dengan *possible eigenvalue* $\lambda=5$ dan $A^*=\begin{pmatrix}5&4&7\\4&5&-\infty\\3&4&5\end{pmatrix}$.

d. Maksimum rata-rata dari matriks interval **A**.

Jika di ambil rata-rata dari matriks interval **A**, maka didapatkan matriks baru yaitu $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7.5 \\ 5 & 4 & -\infty \\ -\infty & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Kemudian tiap baris di ambil nilai maksimumnya maka didapatkan $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 7.5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Akibatnya diperoleh $\underline{A}\otimes\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 11 \\ 11.5 \\ 8 \end{pmatrix}$ dengan $\lambda=6.5$ dan $A^{*}\otimes\mathbf{x}=\lambda\otimes x=\begin{pmatrix} 14 \\ 11.5 \\ 11.5 \end{pmatrix}$ serta $\overline{A}\otimes\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 15.5 \\ 13.5 \\ 13 \end{pmatrix}$. Karena memenuhi $\underline{A}\otimes x\le A^{*}\otimes x\le\overline{A}\otimes x$, maka $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 7.5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ adalah *possible eigenvector* untuk matriks interval **A** dengan *possible eigenvalue* $\lambda=6.5$ dan $A^{*}=\begin{pmatrix} 6.5 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -\infty \\ 4 & 6.5 & 6.5 \end{pmatrix}$. •

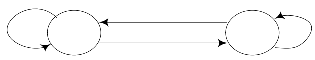
Universal Eigenvector dapat diperoleh berdasarkan pada teorema berikut ini.

Teorema 6. (Cechlarova, 2005)

Misalkan sebuah matriks interval **A** dengan *universal eigenvalue* λ(**A**) = 0 sehingga $\mathcal{G}^{C}(\underline{A})$ mempunyai hanya satu komponen yang *strongly connected* dan misalkan **u** adalah sebuah *fundamental eigenvector* dari matriks $\underline{A}$. Maka **A** mempunyai *universal eigenvector* jika dan hanya jika **u** adalah sebuah *eigenvector* dari matriks $\underline{A}$. ∇

Contoh 4.

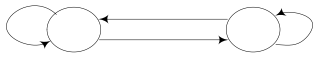
Diberikan matriks interval $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \langle 1,4\rangle & \langle 2,4\rangle \\ \langle 3,5\rangle & \langle 4,6\rangle \end{pmatrix}$. Kemudian dibentuk matriks interval $\mathbf{B}=\mathbf{A}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriks interval bawah $\underline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mempunyai *eigenvalue* $\lambda=4$ dan *eigenvector* $v=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Sedangkan matriks interval atas $\overline{A}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ mempunyai *eigenvalue* $\lambda=6$ dan *eigenvector* $v=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Maka didapatkan matriks interval bawah $\underline{B}=\underline{A}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ yang mempunyai $\lambda=0$ dan *eigenvector* $v=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dengan graph sebagai berikut:



Gambar 4.1. Graph dari matriks interval bawah $\underline{B}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Terlihat pada Gambar 4.1 bahwa $\mathcal{G}^{C}(\underline{A})$ mempunyai hanya satu komponen yang *strongly connected* yaitu $2\rightarrow 2$ dengan bobot sama dengan nol.

Demikian juga dengan matriks interval atas $\overline{B} = \overline{A} - \overline{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mempunyai *eigenvalue* $\lambda = 0$ dan *eigenvector* $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Gambar 4.2. Graph dari matriks interval atas $\overline{B} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Terlihat pada Gambar 4.2 bahwa $\mathcal{G}^C(\overline{A})$ mempunyai hanya satu komponen yang *strongly connected* yaitu $2 \to 2$ dengan bobot sama dengan nol.

Maka, matriks interval **B** mempunyai *universal eigenvalue* $\lambda = 0$ dan *universal eigenvector* $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. •

Contoh 5.

Dari matriks interval pada Contoh 3.1. kemudian dibentuk matriks interval $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Maka didapatkan matriks interval bawah $\underline{B} = \underline{A} - \underline{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -\infty \\ -\infty & -2 & -1 \end{pmatrix}$ mempunyai *eigenvalue* $\lambda = 0$ dan *eigenvector* $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sedangkan matriks interval atas $\overline{B} = \overline{A} - \overline{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & -\infty \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mempunyai *eigenvalue* $\lambda = 0$ dan *eigenvector* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

-2
1
-1

Meskipun berasal dari sebuah matriks interval, namun setelah masing-masing elemen dikurangi *eigenvalue* masing-masing ternyata matriks tersebut bukan merupakan matriks interval lagi. Sebab ada beberapa elemen dari matriks interval bawah yang nilainya lebih besar dari matriks interval atas, yaitu $\underline{a}_{12} = -2 > -4 = \overline{a}_{12}$, $\underline{a}_{13} = 2 > 1 = \overline{a}_{13}$, $\underline{a}_{21} = 0 > -2 = \overline{a}_{21}$ dan $\underline{a}_{22} = -1 > -3 = \overline{a}_{22}$. Akibatnya *eigenvector* dari $\underline{B}$ tidak sama dengan *eigenvector* $\overline{B}$. •

5. Himpunan Terbesar Dari Matriks Interval Jika Diberikan Suatu *Possible Eigenvector*

Untuk mendapatkan himpunan terbesar di suatu matriks interval apabila diberikan suatu *possible eigenvector* akan dilakukan dengan cara iterasi. Matriks A^* pasti terletak di antara matriks $\underline{A}$ dan $\overline{A}$. Kemudian matriks $\underline{A}$ digantikan oleh matriks A^* dan seterusnya hingga nilai dari matriks $\underline{A}$ semakin naik hingga mencapai nilai terbesarnya dan berhenti.

Contoh 6.

Matriks interval diberikan pada Contoh 4.1. Dari keempat macam A^* yang telah didapatkan, diambil A^* dengan nilai terbesar, yaitu jika diberikan vektor yang merupakan eigenvector dari $\overline{A}$, yaitu $A^* = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -\infty \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. Dengan menggunakan algoritma maxalgol, didapatkan matriks A^* mempunyai $\lambda = 6$

dan $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Kemudian di ambil A^* sebagai $\underline{A}^1$, sehingga matriks interval berubah menjadi $\begin{pmatrix} \langle 6,8 \rangle & 4 & \langle 8,9 \rangle \\ \langle 4,6 \rangle & 5 & -\infty \\ \langle 4,5 \rangle & \langle 6,8 \rangle & \langle 6,7 \rangle \end{pmatrix}$. Jika diberikan x adalah *eigenvector* dari $\underline{A}^1$ yaitu $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka didapatkan $A_1^{2*} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -\infty \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ yang sama dengan $A^* = \underline{A}^1$. Jika diberikan x adalah *eigenvector* dari $\overline{A}$ yaitu $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka didapatkan $A_2^{2*} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -\infty \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. Jika diberikan x adalah nilai maksimum dari rata-rata matriks interval, yaitu $x = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, maka didapatkan bahwa x bukan merupakan possible eigenvector.

Jadi, himpunan terbesar dari matriks interval **A** jika diberikan keempat macam *possible eigenvector* kemudian di ambil nilai A^* yang terbesar dan dilakukan secara iterasi adalah $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -\infty \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. •

6. Kesimpulan

1. Generator dari *Possible eigenvector* dari matriks interval **A** adalah *eigenvector* $\underline{A}$, *eigenvector* $\overline{A}$, rata-rata *eigenvector* $\underline{A}$ dan $\overline{A}$ serta dari nilai maksimum tiap baris matriks rata-rata. Hal ini berlaku juga untuk masing-masing kelipatannya dengan memberikan hasil A^* yang sama.
2. Himpunan terbesar suatu matriks interval **A** apabila diberikan suatu *possible eigenvector* didapatkan dengan cara iterasi. Matriks A^* pasti terletak di antara matriks $\underline{A}$ dan $\overline{A}$. Kemudian matriks $\underline{A}$ digantikan oleh matriks A^* dan seterusnya hingga nilai dari matriks $\underline{A}$ semakin naik hingga mencapai nilai terbesarnya dan berhenti.

7. Daftar Pustaka

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. dan Quadrat, J.P. (1992), *Synchronization and Linearity An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley & Sons, New York.

Cechlarova, K. (2005), “Eigenvectors of Interval Matrices over Max-Plus Algebra”, *Journal of Discrete Applied Mathematics*, vol. 150, hal. 2–15.

Heidergott, B., Olsder, G.J. dan Woude, J. van der (2006), *Max Plus at Work, Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press, New Jersey.

Subiono, Woude, J. van der (2000), “Power Algorithm for (max, +) and Bipartite (min, max, +) Systems”, *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 10, hal. 369-389.

Subiono (2007), *Max-plus Algebra Toolbox*, ver. 1.0, Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.